MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 12
24.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“ -Lösungsvorschlag-

1. a) Wir können die Fragestellung als Zugexperiment in einem Urnenmodell auffassen:
Aus einer Urne mit b Kugeln (mit den Nummern der Terrarien) ziehen wie a mal; im 1. Zug das Terrarium für die Schlange 1, im 2. Zug das Terrarium für die Schlange 2, u.s.w. Wichtig: In der Urne befinden sich also die Terrarien, nicht die Schlangen!

   i) Hier ziehen wir **ohne** Zurücklegen (pro Terrarium höchstens 1 Schlange!) **mit** Beachtung der Reihenfolge (die Schlangen sind unterschiedlich!). Also ist die

$$\begin{aligned}\text{Anzahl der Möglichkeiten} &= b\cdot(b-1)\cdot(b-2)\cdot\ \dots\ \cdot(b-a+1)\\ \text{Für } a=6, b=10: &\quad 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 = 151.200.\end{aligned}$$

   ii) Hier ziehen wir **mit** Zurücklegen (beliebig viele Schlangen pro Terrarium!) **mit** Beachtung der Reihenfolge (die Schlangen sind unterschiedlich!). Also ist die

$$\begin{aligned}\text{Anzahl der Möglichkeiten} &= b\cdot b\cdot b\cdot\ \dots\ \cdot b = b^a\\ \text{Für } a=6, b=10: &\quad 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10 = 1.000.000.\end{aligned}$$

b) Das Urnenmodell ist wie in a), also b Terrarien in der Urne, aus der a mal gezogen wird.

   i) Hier ziehen wir **ohne** Zurücklegen (pro Terrarium höchstens 1 Schlange!) **ohne** Beachtung der Reihenfolge (die Schlangen sind ununterscheidbar!). Also ist die

$$\begin{aligned}\text{Anzahl der Möglichkeiten} &= \binom{b}{a}\\ \text{Für } a=6, b=10: &\quad \binom{10}{6} = 210.\end{aligned}$$

   ii) Hier ziehen wir **mit** Zurücklegen (beliebig viele Schlangen pro Terrarium!) **ohne** Beachtung der Reihenfolge (die Schlangen sind ununterscheidbar!). Also ist die

$$\begin{aligned}\text{Anzahl der Möglichkeiten} &= \binom{b+a-1}{a}\\ \text{Für } a=6, b=10: &\quad \binom{10+6-1}{6} = \binom{15}{6} = 5.005\end{aligned}$$

2. a) Es gibt $\binom{20}{12}$ Möglichkeiten für die Auswahl der Positionen, an denen die 12 *Forster*-Bücher stehen; dann noch $\binom{8}{5}$ Möglichkeiten für die Auswahl der Stellen, an denen die 5 *Königsberger*-Bücher stehen; danach noch $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten, die 2 *Blatter*-Bücher zu plazieren, und für das *Heuser*-Buch schließlich nur noch $\binom{1}{1}$ Möglichkeit. Insgesamt gibt es also

$$\binom{20}{12}\cdot\binom{8}{5}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{1}{1} = 21.162.960$$

Möglichkeiten, die Bücher auf die Regalleiste zu stellen (vgl. auch die MISSISSIPPI-Aufgabe aus der Vorlesung!).

b) Eine Möglichkeit wäre z.B.

$$\underbrace{H}_{H-\text{Block}} \quad \underbrace{FFFFFFFFFFFF}_{F-\text{Block}} \quad \underbrace{KKKKK}_{K-\text{Block}} \quad \underbrace{BB}_{B-\text{Block}}$$

Hier kommt es nur darauf an, in welcher Reihenfolge die **Buch-Blöcke** angeordnet sind: Für den 1. Block (ganz links) gibt es 4 Möglichkeiten, für den 2. Block (rechts daneben) nur noch 3, für den 3. Block (weiter rechts daneben) nur noch 2, und für den Block ganz rechts dann nur noch 1 Möglichkeit. Insgesamt gibt es also

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Möglichkeiten, die Bücher blockweise auf die Regalleiste zu stellen.

3. a) Frank muß insgesamt zwei Blocks ostwärts (wir schreiben „rechts") und drei Blocks nordwärts, also nach „oben" laufen. An den Kreuzungen hat er die Möglichkeit, die Richtung zu ändern; jeder Schritt nach links oder unten führt zwangsläufig zu einem Umweg, ist also ausgeschlossen.

Die kürzesten Wege sind also diejenigen, bei denen er in irgendeiner Reihenfolge insgesamt drei „Schritte" (von der Größe eines Blocks) nach oben und zwei nach rechts vornimmt; diese Wege sind auch alle gleich lang. Ein möglicher Weg wäre also RROOO (zuerst zweimal nach rechts, dann die drei Schritte nach oben), ein anderer ORORO (also oben, rechts, oben, rechts, oben), und so weiter.

Insgesamt gibt es so viele Wege, wie es Möglichkeiten gibt, die beiden Rs in einem aus fünf Zeichen bestehenden Code für den gewählten Weg unterzubringen (die anderen Plätze werden dann mit Os aufgefüllt). Das sind also $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten, und man kann sie sogar alle auflisten: RROOO, ROROO, ROORO, ROOOR, ORROO, ORORO, OROOR, OORRO, OOROR, OOORR.

b) Die Überlegung ist identisch zu derjenigen in Aufgabe a): Insgesamt muß Frank m Schritte nach rechts und n Schritte nach oben gehen, insgesamt also $m+n$ Schritte. Die Anzahl der möglichen kürzesten Wege ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, unter den insgesamt $m+n$ zu gehenden Schritten diejenigen m auszuwählen, die nach rechts führen sollen (oder diejenigen n, die nach oben führen); dafür gibt es

$$\binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \binom{n+m}{n}$$

Möglichkeiten.

4. a) Wir erfassen Paßwörter verschiedener Länge gesondert; um möglichst effizient zu rechnen, ermitteln wie die Anzahl von Paßwörtern der Länge ℓ für beliebiges $\ell \geq 2$:

Es gibt $\binom{\ell}{2}$ Möglichkeiten für die Wahl der Plätze für die beiden Buchstaben; für ihre Belegung gibt es dann jeweils $26 \cdot 25$ Möglichkeiten (für die weiter links stehende Stelle einen der 26 Buchstaben des Alphabets, für die weiter rechts stehende einen der verbleibenden 25 Buchstaben). Für die übrigen $\ell - 2$ Stellen gibt es dann jeweils $10^{\ell-2}$ Möglichkeiten (für jede der Stellen eine der zehn Ziffern $0, 1, \ldots, 9$). Insgesamt gibt es also

$$\binom{\ell}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^{\ell-2}$$

Paßworter der Länge ℓ.

Wenn nun die erlaubten Längen $\ell = 4, 5, 6$ sind, gibt es also insgesamt

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=4}^{6} \binom{\ell}{2} \cdot 65 \cdot 10^{\ell-1} &= \binom{4}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^2 + \binom{5}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^3 + \binom{6}{2} \cdot 26 \cdot 25 \cdot 10^4 \\ &= 390.000 \ + \ 6.500.000 \ + \ 97.500.000 \\ &= 104.390.000\end{aligned}$$

verschiedene Paßwörter.

b) i) Es gibt

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 = 100.000$$

verschiedene fünfstellige PIN-Nummern (nämlich diejenigen zwischen 00000 und 99999). Im Urnenmodell wird eine PIN-Nummer bestimmt, indem man aus einer Urne mit zehn Kugeln (Ziffern) fünfmal **mit** Zurücklegen und **mit** Beachtung der Reihenfolge zieht.

ii) Es gibt

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30.240$$

verschiedene fünfstellige PIN-Nummern mit lauter verschiedenen Ziffern.
Im Urnenmodell aus i) wird nun **ohne** Zurücklegen, aber natürlich nach wie vor **mit** Beachtung der Reihenfolge gezogen.

iii) Es gibt

$$\binom{5}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 7290$$

verschiedene fünfstellige PIN-Nummern mit genau 2 Einsen.
Dabei ist

$\binom{5}{2}$ = Anzahl der Mögl. für die Auswahl der 2 Stellen, an denen die 1 stehen soll

9^3 = Anzahl der Mögl., die restlichen 3 Stellen mit den restlichen 9 Ziffern zu besetzen

iv) Es gibt

$$10 \cdot \binom{5}{3} \cdot 9 \cdot 9 = 8100$$

verschiedene fünfstellige PIN-Nummern mit genau einer Ziffer dreifach.
Dabei ist

10 = Anzahl der Mögl. für die Auswahl der Ziffer, die 3-fach vorkommen soll

$\binom{5}{3}$ = Anzahl der Mögl. für die Auswahl der 3 Stellen, an denen diese Ziffer stehen soll

9^2 = Anzahl der Mögl., die restlichen 2 Stellen mit den restlichen 9 Ziffern zu besetzen